

**MODELO DINÁMICO PARA EL LANZAMIENTO DE UNA MONEDA**  
**Francisco Marín Quiroga**  
**Facultad de Ciencias, Departamento de Física**  
**Fundación Universidad de América**

**RESUMEN**

Se desarrolla un modelo físico simple que reproduce de forma realista el comportamiento dinámico de una moneda que se deja caer sobre una superficie plana, rígida y sin fricción. En el aire la moneda gira con rapidez angular constante y su centro de masa describe un movimiento uniformemente acelerado; las colisiones con la superficie se suponen instantáneas y se modelan por medio de un coeficiente de restitución. El modelo desarrollado es solucionado numéricamente y permite determinar que lado de la moneda queda hacia arriba una vez que se han terminado las colisiones con la superficie, los resultados encontrados están de acuerdo con las características probabilísticas de este tipo de experimento y con otros modelos reportados en la bibliografía.

**ABSTRACT**

There develops a physical simple model that reproduces of realistic form the dynamical behavior of a coin that is left to fall down on a flat, rigid surface and without friction. In the air the coin turns with angular constant rapidity and its center of mass describes a uniformly accelerate movement; the collisions with the surface are supposed instantaneous and model themselves by means of a coefficient of restitution. The developed model is solved numerically and allows to determine that side of the coin stays up as soon as the collisions have finished with the surface, the opposing results agree with the characteristics probabilísticas of this type of experiment and with other models reported in the bibliography.

**INTRODUCCIÓN**

Se propone un modelo bidimensional en el cual la moneda tiene una masa  $m$  y una longitud  $l$ . Se asume que la moneda es totalmente rígida. La posición del centro de masa (CM) de la moneda se describe por medio del vector  $\mathbf{R}$  y las posiciones de los extremos 1 y 2 se describen por medio de los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$  (figura 1).

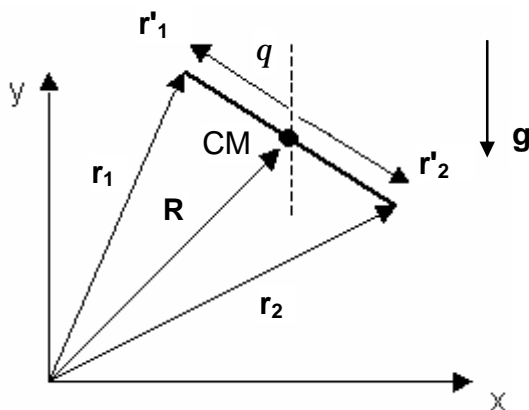


Figura 1. Descripción cinemática de la moneda en el aire.

El ángulo  $q$  representa la orientación de la moneda con respecto a la vertical, de tal forma que en  $q = p/2$  la moneda queda con la cara hacia arriba.

### DINÁMICA DURANTE EL VUELO

Dado que en el aire el CM de la moneda describe un movimiento uniformemente acelerado se tiene que el vector  $\mathbf{R}$  esta dado por:

$$\vec{R} = (x_o + v_x(t-t_o))\hat{i} + \left( y_o + v_{oy}(t-t_o) - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 \right)\hat{j} \quad (1)$$

Durante el vuelo, los extremos de la moneda describen un movimiento circular uniforme con respecto al CM, por lo tanto:

$$\vec{r}'_1 = -\frac{l}{2} \operatorname{sen} q \hat{i} + \frac{l}{2} \operatorname{cos} q \hat{j} \quad (2)$$

$$\vec{r}'_2 = \frac{l}{2} \operatorname{sen} q \hat{i} - \frac{l}{2} \operatorname{cos} q \hat{j} \quad (3)$$

En donde  $q = w(t-t_o) + q_o$ . Puesto que  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1$  y  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2$  entonces:

$$\vec{r}_1 = \left( -\frac{l}{2} \operatorname{sen} q + x_o + v_x(t-t_o) \right)\hat{i} + \left( \frac{l}{2} \operatorname{cos} q + y_o + v_{oy}(t-t_o) - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 \right)\hat{j} \quad (4)$$

$$\vec{r}_2 = \left( \frac{l}{2} \operatorname{sen} q + x_o + v_x(t-t_o) \right)\hat{i} + \left( -\frac{l}{2} \operatorname{cos} q + y_o + v_{oy}(t-t_o) - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 \right)\hat{j} \quad (5)$$

La condición de impacto de la moneda está dada por:

$$\frac{l}{2} \operatorname{cos} q + y_o + v_{oy}(t-t_o) - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{l}{2} \operatorname{cos} q + y_o + v_{oy}(t-t_o) - \frac{1}{2}g(t-t_o)^2 = 0 \quad (7)$$

La ecuación (6) corresponde a un choque con el extremo 1 y la ecuación (7) a un choque con el extremo 2. Las ecuaciones (6) y (7) deben ser solucionadas numéricamente, cada ecuacion suministra un tiempo de choque, el tiempo correcto es naturalmente el menor de los dos obtenidos.

### DINAMICA DEL IMPACTO

Se supone que la superficie es totalmente plana, rígida y carente de fricción, de esta forma el diagrama de cuerpo libre durante la colisión es mostrado en la figura (2).

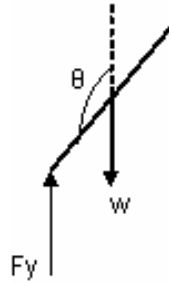


Figura 2. Diagrama de cuerpo libre durante la colisión.

En donde  $F_y$  es la fuerza aplicada por la superficie sobre la moneda y  $w$  es el peso de la moneda. La ecuación de suma de fuerzas en dirección  $y$  está dada por:

$$F_y - mg = ma \quad (8)$$

La ecuación anterior es aproximadamente equivalente a:

$$F_y - mg \approx \frac{m(v'_y - (-v_y))}{\Delta t} \quad (9)$$

En donde  $v'_y$  y  $v_y$  son las rapidezces del CM de la moneda después y antes del impacto respectivamente. Suponiendo que  $F_y \gg mg$ , la ecuación (9) toma la forma:

$$v'_y = -v_y + \frac{F\Delta t}{m} \quad (10)$$

La ecuación de suma de torques alrededor del centro de masa es:

$$\pm \frac{F_y l \text{sen } q}{2} = I\alpha \quad (11)$$

El signo superior corresponde a un choque con el extremo 2 y el signo inferior a uno con el extremo 1. La ecuación (11) puede escribirse de forma aproximada como:

$$\pm \frac{F_y l \text{sen } q}{2} \approx \frac{I(w' - w)}{\Delta t} \quad (12)$$

Por lo tanto:

$$w' = w \pm \frac{F_y l \Delta t \text{sen } q}{2I} \quad (13)$$

Se propone que la magnitud de las velocidades antes y después del choque esten relacionadas por medio del coeficiente de restitución e tal como se muestra a continuación:

$$v'_y = e v_y \quad (14)$$

Usando las ecuaciones (10), (13) y (14) se obtiene:

$$w' = w \pm \frac{m(1+e)v_y l \text{sen } q}{2I} \quad (15)$$

Las ecuaciones (14) y (15) permiten conocer la rapidez del CM y la rapidez angular de la moneda después de una colisión en función de las rapidezces antes del choque.

### CONDICIÓN DE FINALIZACIÓN DE LOS IMPACTOS

La máxima altura alcanzada por el CM en el último impacto está dada por:

$$y_{\max} = \frac{v'_y}{2g} + y_o \quad (16)$$

Los impactos finalizan cuando:

$$y_{\max} < \frac{l}{2} \quad (17)$$

Es decir, los impactos terminan cuando la altura alcanzada por el CM no es suficiente para permitir un giro de la moneda.

### RESULTADOS

En la figura 3 se muestran los resultados obtenidos a partir del modelo planteado, los ejes horizontal y vertical representan la energía de rotación y la altura con la cual se lanzó la moneda respectivamente. Las franjas negras corresponden a las condiciones iniciales que dan como resultado que la moneda al terminar sus colisiones quede con la cara hacia arriba.

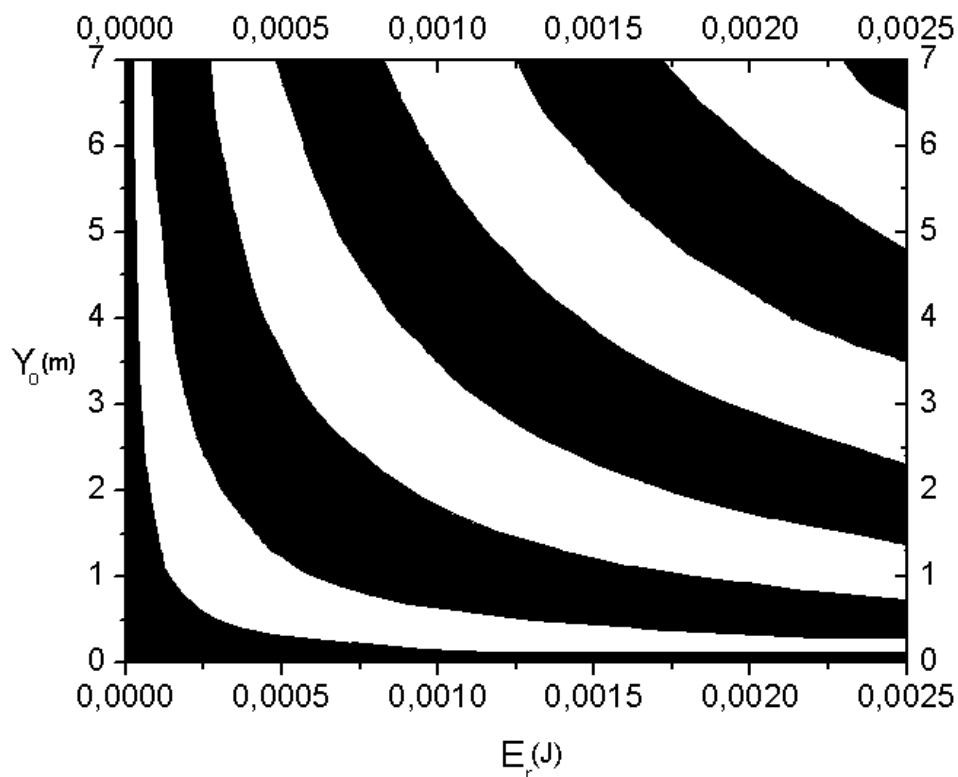


Figura 3. Resultados del modelo, los valores utilizados en la simulación son  $m=0.30\text{kg}$ ,  $e=0.250$  e  $I=0.025\text{kg}\cdot\text{m}^2$ .

En la figura 3 se observa como la mitad del gráfico corresponde a condiciones iniciales para las cuales se obtiene cara y la otra mitad corresponde a la condición de sello, lo cual corresponde a un 50% de probabilidad de obtener cara para un número grande de lanzamientos aleatorios.

## **CONCLUSIONES**

El modelo mostrado describe el comportamiento dinámico del lanzamiento de una moneda a partir de leyes físicas simples, además está de acuerdo con las propiedades probabilísticas que se han reportado para este tipo de experimento. Los resultados concuerdan con otros modelos desarrollados por diversos autores [1] [2] y [3]. La dinámica de la moneda entre choques es trivial, los tiempos de las colisiones se calculan a partir de la solución numérica de las ecuaciones (6) y (7), las variables después del choque se calculan a partir de (14) y (15) y los choques se dan por finalizados cuando se cumple la condición (17).

## **BIBLIOGRAFÍA**

[1] Vulovic, V and Prange, R. Randomness of a true coin. American Journal of Physics No33. 1986.

[2] Ford, J. How random is a coin toss?. Phys. Today 36 No6, 40, 1983.

[3] <http://www.esm.psv.edu/nld/cointoss/html>

## **AGRADECIMIENTOS**

El autor expresa sus agradecimientos a Diego Luis González Cabrera por su colaboración en la elaboración del modelo y la implementación de la rutina en Fortran que facilitó la Universidad Nacional de Colombia (sede Bogotá).